Quantum mechanical study of the properties of a harmonic beam

1975 J. Phys. A: Math. Gen. 8 1614

(http://iopscience.iop.org/0305-4470/8/10/015)

J. Phys. A: Math. Gen., Vol. 8, No. 10, 1975. Printed in Great Britain. © 1975

Etude quantique des propriétés du faisceau harmonique

P Dewael

Laboratoire d'Analyse des Contraintes, Université Libre de Bruxelles, 87, Avenue Ad Buyl, 1050 Brussels, Belgium

Reçu le 20 janvier 1975, présentation définitive le 27 juin 1975

Résumé. Nous présentons une étude des propriétés (intensité et cohérence) du faisceau harmonique en relation avec la statistique du fondamental: les cas d'un fondamental cohérent (laser idéal), chaotique et laser non-idéal sont envisagés. Deux approximations d'ordre différent sont considérées et leur domaine de validité étudié. On montre qu'un champ cohérent n'engendre un harmonique cohérent que si son nombre de photons est suffisamment grand, tandis qu'un fondamental chaotique donne toujours un harmonique de statistique différente. On montre aussi qu'un fondamental de profil spectral Lorentzien donne un harmonique de temps de cohérence quatre fois plus petit.

Abstract. We present a study of the harmonic wave properties (intensity and coherence) in connection with the statistics of the fundamental: coherent (ideal laser), chaotic and non-ideal laser cases are considered for the fundamental. Two approximations of different order are considered and their validity range is studied. We show that a coherent wave generates a coherent harmonic only if its photon number is great, while a chaotic one always creates a harmonic with different statistics. We show also that a fundamental with Lorentzian spectral width generates a harmonic with a coherence time four times smaller.

1. Introduction

Depuis sa découverte expérimentale en 1961 (Franken 1961), la génération du deuxième harmonique a fait l'objet de nombreux travaux; citons principalement pour la théorie classique ceux de Bloembergen (1965) et pour la théorie quantique ceux de Walls (1971) et de Walls et Tindle (1971, 1972).

L'étude quantique a avant tout consisté jusqu'à présent en une étude numérique du nombre de photons harmoniques (Walls et Tindle 1972) et de ses limitations (Crosignani *et al* 1972) dans le cas d'un fondamental cohérent; les propriétés de cohérence n'ont, elles, reçu qu'une faible attention (Walls et Tindle 1972).

Nous nous proposons dans cet article d'examiner de façon plus étendue les relations existant entre les propriétés d'intensité et de cohérence de l'harmonique et la statistique du fondamental (dans le cas de faible temps d'interaction).

2. Equations de départ

La génération du deuxième harmonique est décrite par l'Hamiltonien

$$H = \hbar\omega a_1^+ a_1 + 2\hbar\omega a_2^+ a_2 + \hbar K(a_1 a_1 a_2^+ + a_1^+ a_1^+ a_2) \tag{1}$$

où ω est la fréquence fondamentale, a_1 et a_2 sont les opérateurs destructeurs de photons des modes fondamentaux et harmoniques, et K est le paramètre de couplage. Il en résulte le système de Heisenberg:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}a_1(t)}{\mathrm{d}t} &= -\mathrm{i}\omega a_1 - 2\mathrm{i}Ka_1^+ a_2 \\ \frac{\mathrm{d}a_2(t)}{\mathrm{d}t} &= -2\mathrm{i}\omega a_2 - \mathrm{i}Ka_1 a_1 . \end{aligned} \tag{2}$$

Le système ainsi obtenu ne peut être résolu, analytiquement, de façon exacte. Une méthode de résolution consiste à développer $a_1(t)$ en série; plus le nombre de termes retenus dans le développement sera grand, plus grande sera la gamme de temps d'interaction où les résultats seront valables. Nous allons considérer deux cas: (i) approximation d'ordre 0: seul le premier terme du développement est retenu; et (ii) approximation d'ordre 4: les termes sont retenus jusqu'à celui en t^4. Nous discuterons ensuite le domaine de validité de chacune de ces approximations.

3. Approximation d'ordre 0

Elle revient à supposer que le fondamental ne subit, du fait de l'interaction, que des fluctuations négligeables. On a alors

$$a_1(T) = a_{10}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega T}$$

si T est le temps d'interaction; $a_{10} = a_1(0)$ d'où

$$a_2(T) = (a_{20} - \mathrm{i}KTa_{10}a_{10})\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega T}.$$

Partant de l'expression de $a_2(T)$, il est alors possible d'étudier les propriétés du rayonnement harmonique en suivant la méthode de Glauber et Mollow (1967). Elle consiste à calculer la fonction caractéristique,

$$\chi_N = \mathrm{Tr}(\rho_0\,\mathrm{e}^{\eta a_2^+(T)}\,\mathrm{e}^{-\eta^* a_2(T)})$$

(ρ_0 est l'opérateur densité du système initial), dont la transformée de Fourier nous donne alors $P_2(\alpha, T)$, la P représentation (Glauber 1963a, b) de l'opérateur densité du champ harmonique. Nous pouvons dès lors calculer les propriétés du faisceau harmonique qui dépendront (par ρ_0) de la statistique du fondamental.

3.1. Fondamental cohérent (laser idéal: $|\alpha_0\rangle$)

L'état initial du système est $|\alpha_0\rangle|0\rangle$. Son opérateur densité aura comme P représentation $P_0(\alpha, \beta) = \delta^2(\alpha - \alpha_0)\delta^2(\beta)$. On obtient alors

$$P_2(\alpha, T) = \delta^2(\alpha + \mathrm{i}KT\alpha_0^2\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega T}). \tag{3}$$

Le rayonnement harmonique est, à la sortie du cristal, dans l'état cohérent: $|-\mathrm{i}KT\alpha_0^2\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega T}\rangle$, avec comme nombre moyen de photons,

$$\bar{n}_2(T) = \int P_2(\alpha, T)|\alpha|^2\,\mathrm{d}^2\alpha = n_{10}^2(KT)^2.$$

Les propriétés de cohérence du fondamental ont été transférées à l'harmonique (et ce, à tout ordre de cohérence).

3.2. Fondamental chaotique

$$P_0(\alpha, \beta) = \frac{1}{\pi n_{10}} \, e^{-|\alpha|^2/n_{10}} \, \delta^2(\beta)$$

d'où on tire

$$P_2(\alpha, T) = \frac{1}{2\pi n_{10} KT} \frac{e^{-|\alpha|/n_{10}KT}}{|\alpha|}. \tag{4}$$

L'opérateur densité du champ harmonique (et par là son état) est donc différent de celui du fondamental. Voyons les propriétés du champ harmonique.

(i) *Nombre de photons.* $\bar{n}_2(T) = 2n_{10}^2(KT)^2$. On retrouve le résultat connu suivant lequel, pour un fondamental chaotique, le rendement en deuxième harmonique est double de celui d'un champ cohérent de même nombre de photons (ceci étant dû au fait que le nombre de photons harmoniques est relié, non au carré du nombre de photons du fondamental, mais à sa fonction de corrélation du quatrième ordre $G^{22}(xxxx)$) (Bloémbergen et Ducuing 1964).

(ii) *Cohérence.* Comme nous considérons des champs monochromatiques, ils seront nécessairement cohérents au deuxième ordre (cohérence temporelle parfaite). La différence observée dans la P représentation des champs harmonique et fondamental se retrouvera, par contre, au niveau de leur cohérence du quatrième ordre (caractérisée par les fonctions $G^{22}(x_1 \ldots x_4)$). En effet, calculons l'effet de groupement de chacun des champs (qui caractérise l'effet Hanbury-Brown et Twiss 1957),

$$h = \frac{G^{22}(xxxx)}{(G^{11}(xx))^2}.$$

On obtient, pour le fondamental, $h_f = 2$; et pour l'harmonique, $h_h = 6$. Le champ harmonique présentera donc un effet Hanbury-Brown et Twiss plus poussé que le fondamental.

Remarque

Comme dit plus haut, le nombre de photons harmoniques est relié à la fonction $G^{22}(x \ldots x)$ fondamental. Par conséquent, le rendement en prenant comme fondamental l'harmonique créé par un champ chaotique vaudra six fois celui dû à un champ cohérent de même nombre de photons.

3.3. Laser non-idéal

Pour tenir compte des fluctuations de phase et d'intensité présentes dans un laser, nous prendrons comme représentation la superposition d'un état cohérent à diffusion de phase (Glauber 1964) et d'un champ chaotique. On a alors

$$P_0(\alpha, \beta) = \frac{1}{\pi\langle n\rangle} \exp\left(-\frac{|\alpha - \alpha_0 \, e^{-i(\omega t + \varphi(t))}|^2}{\langle n\rangle} \right) \delta^2(\beta) \tag{5}$$

où $\langle n\rangle$ est le nombre moyen de photons du champ chaotique, $|\alpha_0|^2$ est le nombre moyen de photons du champ cohérent, et $\varphi(t) = \int_0^t f(t')\,dt'$ avec $f(t)$ fonction aléatoire Gaussienne. Les caractéristiques du champ laser considéré sont présentées ici.

(i) $n_{10} = \langle n \rangle + |\alpha_0|^2$.
(ii) Spectre d'energie $I(\omega') \propto 2\xi/[\xi^2 + (\omega' - \omega)^2]$, spectre de Lorentz où

$$\langle f(t')f(t'') \rangle = 2\xi\delta(t' - t'').$$

(iii) Temps de cohérence $\Delta\tau_f = 1/\xi\sqrt{2}$.

Partant d'un tel fondamental, le calcul montre qu'à la sortie du cristal, le champ harmonique a comme P représentation,

$$P_2(\alpha, T) = \frac{1}{2\pi\langle n \rangle KT} \frac{\exp -[|(\alpha/KT)^{1/2} + \mathrm{i}\alpha_0^* \, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(\omega T + \varphi(T))}|^2/\langle n \rangle]}{|\alpha|} \tag{6}$$

et comme propriétés :

(i) $\bar{n}_2(T) = \int P_2(\alpha, T)|\alpha^2| \, \mathrm{d}^2\alpha = (KT)^2(2\langle n \rangle^2 + |\alpha_0|^4 + 4|\alpha|^2\langle n \rangle)$.
Pour n_{10} donné, $\bar{n}_2(T)$ sera d'autant plus grand que $\langle n \rangle$ est grand : c'est-à-dire que les fluctuations d'intensité sont grandes.

(ii) $$I_h(\omega') \propto \frac{8\xi}{16\xi^2 + (\omega' - 2\omega)^2}.$$

Le spectre harmonique est centré sur la fréquence 2ω et son ouverture vaut quatre fois celle du fondamental.

(iii) $$\Delta\tau_h = \frac{1}{4\xi\sqrt{2}} \quad \text{et donc} \quad \Delta\tau_h = \frac{\Delta\tau_f}{4}.$$

4. Approximation d'ordre 4

Comme dit plus haut, elle consiste à écrire

$$a_1(t) = a_{10} + t\left(\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} + \frac{t^2}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 a_1}{\mathrm{d}t^2}\right)_{t=0} + \frac{t^3}{3!}\left(\frac{\mathrm{d}^3 a_1}{\mathrm{d}t^3}\right)_{t=0} + \frac{t^4}{4!}\left(\frac{\mathrm{d}^4 a_1}{\mathrm{d}t^4}\right)_{t=0},$$

chacune de ces dérivées étant calculée à partir du système (2). Cette expression, placée dans la deuxième équation de (2), donne alors $a_2(t)$ et une étude analogue à celle qui précède peut s'effectuer. Les calculs étant longs, nous nous contenterons d'en donner quelques résultats.

4.1. Fondamental cohérent

$$\bar{n}_2(T) = n_{10}(KT)^2 - \tfrac{4}{3}(n_{10}^3 + n_{10}^2)(KT)^4. \tag{7}$$

Effet de groupement :

$$h_h \simeq 1 + \frac{4}{n_{10}} + \frac{2}{n_{10}^2}.$$

Pour de petits n_{10} le champ harmonique ne sera donc pas parfaitement cohérent.

4.2. Fondamental chaotique

$$\bar{n}_2(T) = 2n_{10}^2(KT)^2 - \tfrac{4}{3}(6n_{10}^3 + 2n_{10}^2)(KT)^4. \tag{8}$$

L'écart par rapport au résultat d'ordre 0 est donc rapidement beaucoup plus important que dans le cas cohérent.

$$h_{\mathrm{h}} \simeq 6+\frac{6}{n_{10}}+\frac{1}{n_{10}^2},$$

écart par rapport au résultat d'ordre 0 pour de faible n_{10}.

5. Validité des approximations considerées

Si on trace la courbe représentative de (7), on voit qu'elle atteint un maximum pour $KT = [3/8(n_{10}+1)]^{1/2}$ et $n_2(T) = \frac{3}{16}n_{10}$, pour ensuite redescendre. En fait, (7) n'est plus valable pour de tels temps d'interaction pour lesquels une approximation d'ordre supérieur doit être considérée (entraînant l'apparition de terme en $(KT)^6, (KT)^8, \ldots$ dans l'expression de $n_2(T)$). Ce que l'on peut dire c'est que (7) est valable dans la première partie de la courbe (où les termes en $(KT)^6, (KT^8)\ldots$ sont négligeables), c'est-à-dire celle qui correspond à des temps d'interaction allant de 0 à $(1/2K)[3/8(n_{10}+1)]^{1/2}$ et donc à des rendements en harmonique ne dépassant par 18 % (en intensité). Ce résultat est appuyé par le bon accord, pour ces temps d'interaction, entre les valeurs tirées de (7) et celles obtenues numériquement par Walls et Tindle (1972).

Dans le cas de l'équation (8) relative au cas chaotique, un même raisonnement nous amène à un domaine de validité allant jusqu'à un rendement en intensité de 11 %. En ce qui concerne l'approximation d'ordre 0, elle sera valable, dans le cas cohérent, à la précision ϕ (par rapport à l'approximation d'ordre 4) si

$$\tfrac{4}{3}(KT)^4(n_{10}^3+n_{10}^2) < \phi n_{10}^2(KT)^2. \tag{9}$$

Par exemple, si on veut un résultat valable à 1 % près, (9) donne

$$KT < \tfrac{1}{20}[3/(n_{10}+1)]^{1/2},$$

ce qui correspond à un rendement maximum de 1·5 %. Dans le cas chaotique, un calcul identique donne en validité allant jusqu'à un rendement de 1 %.

Remerciements

Mes remerciements vont à Monsieur Jean Ebbeni pour les conseils qu'il m'a fournis au long de ce travail. Cette recherche est subsidiée par IRSIA (Institut pour l'encouragement de la Recherche Scientifique dans l'Industrie et l'Agriculture).

Références

Bloembergen N 1965 *Nonlinear Optics* (New York: Benjamin)
Bloembergen N et Ducuing J 1964 *Phys. Rev.* A **133** 1493–502
Crosignani B, Di Porto P et Solimeno S 1972 *J. Phys.* A: *Gen. Phys.* **5** L119–21
Franken P A, Hiel A E, Peters C W et Weinreich G 1961 *Phys. Rev. Lett.* **7** 118–9

Glauber R J 1963a *Phys. Rev.* **130** 2529–39
—— 1963b *Phys. Rev.* **131** 2766–88
—— 1964 *Quantum Optics and Electronics* eds C De Welt, A Blandin et C Cohen-Tannoudji (New York: Gordon and Breach) pp 65–185
Glauber R J and Mollow B R 1967 *Phys. Rev.* **160** 1076–108
Hanbury-Brown R et Twiss R A 1957 *Proc. R. Soc.* A **243** 291–319
Walls D F 1971 *J. Phys.* A: *Gen. Phys.* **4** 813–26
Walls D F et Tindle C T 1971 *Lett. Nuovo Cim.* **2** 915–8
—— 1972 *J. Phys.* A: *Gen. Phys.* **5** 534–45